IUT d'Orléans - Département d'Informatique
TD de Probabilités

Fiche 1
Dénombrement

DENOMBREMENT : arrangements et combinaisons
Le but de cette première partie est d'introduire la fonction factorielle, de s'entraîner à la logique des probabilités et au partitionnement d'événements complexes en événements élémentaires. Cette partie sera également utile à la compréhension des variables aléatoires binomiales introduites plus tard dans le cours.

Exercice 1 *Combien de mots différents peut-on faire avec les lettres des mots suivants :*
1/ OBJET, 2/ POP, 3/ RESEAU, 4/ LANGAGE, 5/ TEMPLATE.

Exercice 2 *Un étudiant possède 6 classeurs : 3 noirs, 1 rouge, 1 blanc et 1 bleu. S'il tient à placer les noirs les uns derrières les autres, de combien de manières peut-il ranger ses classeurs ?*
Même question avec 12 classeurs : 6 noirs,4 rouges, 1 blanc et 1 bleu ?

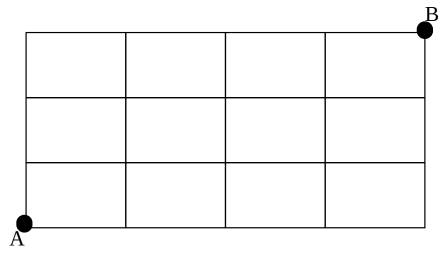
Exercice 3 *De combien de manières peut-on asseoir 8 personnes en rang si :*
1/ Aucune restriction n'est de mise ;
2/ Les personnes A et B veulent être ensemble ;
3/ Les hommes ne doivent avoir que des voisines, en supposant qu'il y a 4 hommes et 4 femmes
4/ Les hommes qui sont au nombre de 5, doivent rester ensemble.
5/ Les personnes forment 4 couples et si chaque couple doit rester réuni.

Exercice 4 *Pour un jeu de 52 cartes, combien de mains de 5 cartes existe-t-il ?*

Exercice 5 *Un étudiant doit répondre à 7 des 10 questions d'un examen :*
1/ De combien de manières peut-il les choisir ?
2/ Même question s'il est obligé de choisir au moins 3 des 5 premières questions.

Exercice 6 *Cinq prix distincts doivent être décernés à des étudiants méritants choisis dans une classe de 30 personnes. Combien de résultats peut-on avoir si :*
a) le cumul des prix est admis ;
b) le cumul n'est pas possible.

Exercice 7 *On considère le réseau de points ci-dessous. On suppose qu'en partant du point A, on peut à chaque pas soit monter d'un cran, soit aller à droite. On continue à avancer ainsi jusqu'à ce que le point B soit atteint. Combien de chemins différents peut-on prendre pour aller de A à B ?*



Noter que pour atteindre B à partir de A, il faut faire 4 pas à droite et 3 vers le haut.

Fiche 2
Calcul de Probabilités et Variables Aléatoires

Calcul de Probabilités

Cette partie a pour but de vous familiariser au calcul de la probabilité de l'union de deux événements et de vous entraîner à la décomposition d'un événement complexe en événements simples disjoints afin d'en calculer la probabilité.

Exercice 8
A et B sont deux événements tels que $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$ et $P(A \cap B)$=0.1. 1/ Quelle est la probabilité que A ou B arrive ?
2/ Quelle est la probabilité qu'exactement un des deux événements arrive ?
3/ Quelle est la probabilité que ni A ni B n'arrive ?
4/ Quelle est la probabilité qu'au plus un des deux événements arrive ?
Indication : Faire un dessin pour chaque situation

Exercice 9 *Un magasin accepte les cartes de crédit American Express ou VISA. 24% de ses clients possèdent une carte American Express, 61% une VISA et 11% possèdent les deux. Quel est le pourcentage de clients ne possédant pas une carte de crédit acceptée par le magasin ?*

Exercice 10 *Dans une population, 45 % des individus sont vaccinés contre la fièvre jaune, 60 pour-cent contre la diphtérie, et 30 contre les deux maladies. On introduit les deux événements A et B suivant : A : "être vacciné contre la fièvre jaune", et B : "être vacciné contre la diphtérie". Soit C l'événement "être vacciné contre aucune de ces deux maladies", exprimez C en fonction de A et B. Quelle est la probabilité de C ?*

Exercice 11 *On joue à pile ou face en lançant une pièce trois fois. 1/ Quelle est la probabilité d'avoir face au moins une fois ?*
2/ Quelle est la probabilité d'avoir exactement une face ?

Exercice 12 *Une roulette a 38 cases, 18 sont noires, 18 sont rouges et 2 sont vertes. On suppose qu'à l'arrêt de la roulette la boule est dans une seule case. Je parie sur rouge, tu paries sur noir.*
1/ Quelle est la probabilité que je gagne ?
2/ Quelle est la probabilité qu'au moins un de nous gagne ?
3/ Quelle est la probabilité qu'au moins un de nous perde ?

Exercice 13 *Trois amis sont mis au hasard dans une classe parmi cinq. Quelle est la probabilité qu'ils soient tous les trois dans des classes différentes ?*

Variables Aléatoires

Cette partie a pour but de lier la notion d'événement à la notion de variable aléatoire et d'établir la loi de probabilités qui lui est associée.

Exercice 14 *On lance simultanément deux dés équilibrés, les 6 faces de ces dés sont numérotées de 1 à 6. On introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeur la somme des valeurs de chaque dé.*
1/ Donner des exemples d'évènements disjonts et joints
2/ Donner la probabilité des évènements suivants :
a) $\{X = 1\}$, $\{X > 2\} \cap \{X \ \textit{est pair}\ \}$, $\{X \leq 3\} \cup \{X \ \textit{est impair}\ \}$.
b) Etablir la loi de X .

Exercice 15 *On choisit deux boules au hasard d'une urne en contenant 8 blanches, 4 noires et 2 oranges. Supposons que l'on reçoive 2 euros pour chaque boule noire tirée et que l'on perde 1 euro pour chaque boule blanche tirée, les boules oranges correspondant à un gain nul. Désignons les gains nets par X. Quelles sont les valeurs possibles de X et quelles sont les probabilités associées à ces valeurs ?*

Exercice 16 *Un vendeur a fixé deux rendez-vous pour vendre des encyclopédies. Au premier rendez-vous, il vendra un livre avec une probabilité 0,3 alors qu'au second, il en vendra un avec une probabilité 0,6. A chaque vente, il y a autant de chances de vendre le modèle de luxe qui coûte* 180 *euros que le modèle standard qui coûte 90 euros. Soit X la valeur totale en euros de toutes les ventes, donner la loi de X.*

Exercice 17 *Cinq nombres distincts sont distribués aléatoirement à des joueurs numérotés de 1 à 5. Lorsque deux joueurs comparent leur numéro, celui qui a le plus grand est déclaré vainqueur. Au départ, les joueurs 1 et 2 comparent leur numéro ; le vainqueur compare le sien avec le joueur numéro 3, etc. Soit X le nombre de fois où le joueur 1 gagne. Donner la loi de X.*

Exercice 18 *Une variable aléatoire X prend* 4 *valeurs :* $1.5, 2, 3.1$ *et* 4. *X a pour fonction de répartition* $F(1.8) = 0.25$, $F(2) = 0.3$, *F(3.5)=0.9, F(4)=1. Donner la loi de probabilité de X.*

Exercice 19 *On lance 4 fois une pièce équilibrée. X désigne le nombre de piles obtenu. Représenter graphiquement la loi de probabilité de X.*

Fiche 3
Indépendance et probabilités conditionnelles

Exercice 20 *Dans un groupe de TP, il y a trois filles et deux garçons. Il est connu que 35% des garçons sont des fumeurs contre 20% seulement des filles. Trouver la probabilité qu'en interrogeant un étudiant sélectionné au hasard dans ce groupe de TP 1/ on choisisse un fumeur,*
2/ si c'est un fumeur, que ce soit une fille.

Exercice 21 *Dans l'exercice 3 de la fiche 2, les événements A et B sont-ils indépendants ?*

Exercice 22 *Une urne contient 4 boules blanches et 4 noires. On tire simultanément et sans remise 4 boules au hasard, l'ordre est donc sans importance. Si deux sont blanches et deux sont noires on s'arrête. Sinon on remet les boules dans l'urne et on recommence le tirage, jusqu'à obtenir 2 blanches et 2 noires.*
a) Quelle est la probabilité qu'il y ait 1 tirage ? 2 tirages ?
b) Sachant qu'il y a deux tirages, quelle est la probabilité d'avoir obtenu au moins une boule blanche au premier tirage ?
c) Quelle est la probabilité qu'il faille exactement n tirages avant de s'arrêter ?*

Exercice 23 *On lance un dé équilibré à 6 faces. Si on obtient le chiffre k on lance k fois une pièce de monnaie. Pour cette pièce la probabilité d'obtenir pile est 1/3. On note D la valeur du dé, et P le nombre de pile obtenu. Calculer :*
a) $\mathbb{P}(\{P=2\}\cap\{D=2\})$,
b) $\mathbb{P}(P=2|D=4)$,
c) $\mathbb{P}(P=5)$,
d) $\mathbb{P}(D=5|P=5)$.

Exercice 24 *Un professeur sait par expérience que la chance de réussir son cours est 0.95 pour l'étudiant qui travaille régulièrement, de 0.5 pour celui ou celle qui travaille plus ou moins, et de 0.2 pour qui ne travaille pas du tout. Il estime, de plus, que parmi les élèves qui suivent son cours, 50 % travaillent régulièrement, 35% travaillent plus ou moins et 15% ne travaillent pas. Si l'on considère un étudiant au hasard dans un groupe auquel ce professeur enseigne, calculer la probabilité*
1/ qu'il réussisse le cours,
2/ qu'ayant réussi le cours, il n'ait pas travaillé du tout.

Exercice 25 *Les Anglais et les Américains orthographient le mot rigueur, respectivement, rigour et rigor. Un homme ayant pris une chambre dans un hôtel parisien a écrit ce mot sur un bout de papier. Or cet hôtel est exclusivement fréquenté par 40% d'Anglais et 60% d'Américains.*
1/ Quelle est la probabilité qu'une lettre prise au hasard dans ce mot, soit une voyelle ?
2/ Une lettre est tirée au hasard dans ce mot, c'est une voyelle. Quelle est la probabilité que l'auteur du mot soit Anglais ?

Exercice 26 *Un tireur vise une cible. Il dispose de trois cartouches mais il cesse de tirer dès qu'il a touché sa cible. Sa probabilité de toucher la cible au premier essai est 0.3, au second (si nécessaire) 0.5 et 0.6 au troisième si nécessaire. Calculer la probabilité que*
1/ la cible soit touchée au second essai,
2/ trois essais soient effectués,
3/ la cible est atteinte.

Exercice 27 *Deux cartes sont tirées au hasard dans un paquet de 52 cartes sans remise. Est-ce que les évènements "la première carte est un valet" et "la deuxième carte est un as" sont indépendants ? Qu'en est-il si le tirage est avec remise ?*

Exercice 28 *On jette deux dés. Est-ce que les évènements "il y a au moins un 6" et "la somme est 7" sont indépendants ?*

Exercice 29 *Une urne contient 112 dés dont 56 sont équilibrés, alors que les autres sont biasés de telle façon que 1 sort avec probabilité* $1/2$ *et toutes les autres faces sortent avec probabilité* $1/10$.

1. *On extrait de l'urne un dé au hasard et on indique par* X *le résultat du lancé. Quelle est la probabilité que* $X=3$ *?*
2. *On extrait de l'urne un dé au hasard qu'on lance deux fois. Sachant que les deux lancés ont donné 2 et 3, quelle est la probabilité que le dé choisi soit biaisé ?*

Fiche 4 [1]
Variables Aléatoires Discrètes

Exercice 30 *Montrer que si*
$*$ *1.* X *suit une loi binomiale* $B(n,p)$ *alors,* $E(X)=p*n$ *et* $Var(X)=(1-p)*p*n$,
$*$ *2.* X *suit une loi de Poisson* $P(\lambda)$ *alors,* $E(X)=Var(X)=\lambda$,
3. X *suit une loi Géométrique* $G(p)$ *alors,* $E(X)=1/p$, *et* $Var(X)=(1-p)/p^2$.

1. Les exercices précédés d'une * sont prioritaires, ceux précédés de deux ** sont plus difficiles.

***Exercice 31** *Soient X une Bernoulli $X \sim B(p)$, Y une Bernoulli $Y \sim B(q)$ et Z une binomiale $Z \sim B(n, r)$. On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes. Calculer $E(X+Y-Z)$, $Var(X+Y-Z)$, $E(X(Y-Z))$, $Cov(X+Z, X)$. Soit $W \equiv Y + \frac{q}{r}Z$ $(r \neq 0)$, calculer l'espérance et la variance de W.*

***Exercice 32** *On suppose qu'un patient admis à un hôpital a 7 chances sur 100 de contracter une infection nosocomiale. On considère un service de 20 lits. En supposant que les cas sont indépendants, calculer la probabilité d'observer dans ce service au plus 3 patients avec une infection nosocomiale ? Quel est le nombre moyen de patients atteints par l'infection ?*

Exercice 33 *Une urne contient 4 boules numérotées 0,1,1 et 2. On effectue n tirages avec remise (c'est à dire qu'après chaque tirage la boule tirée est remise dans l'urne). On note X_i le numéro de la ième boule extraite.*

1. *Calculer la loi de X_i pour $i = 1, \cdots, n$.*
2. *On pose $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, calculer $E(Y_n)$ et $Var(Y_n)$.*

Exercice 34 *Un joueur lance n fois un dé équilibré. A chaque lancé, il gagne la valeur du numéro obtenu si celui-ci est pair, et il la perd si le numéro est impair.*

1. *Soit X_k le nombre de fois où le numéro k est obtenu $(1 \leq k \leq 6)$. Quelle est la loi de X_k ?*
2. *On note G le gain du joueur. Exprimer G en fonction des X_i et calculer $E(G)$.*

****Exercice 35** *On modélise le nombre de champignons ramassés par une variable de Poisson N de paramètre λ.*

1. *Quelle est la probabilité d'avoir ramassé au moins 3 champignons ?*

Chaque champignon, indépendamment des autres, a la probabilité p d'être vénéneux et $(1-p)$ d'être comestible.

1. *Quelle est la probabilité d'avoir ramassé au moins un champignon vénéneux ?*
2. *Quel est le nombre moyen de champignons vénéneux ?*

Fiche 5 [2]
Variables Aléatoires Continues

***Exercice 36** *Soit X une variable aléatoire de densité f définie sur $[0,2]$ par $f(x) = x$ sur $[0,1]$, $f(x) = 2-x$ sur $[1,2]$ et nulle partout ailleurs.*

1. *Vérifier que f est une densité de probabilité,*
2. *Calculer $P(X \leq 1/2)$, $P(1/2 < X \leq 3/2)$,*
3. *Calculer l'espérance et la variance de X.*

***Exercice 37** *Soit $X \sim N(0,1)$.*

1. *Quelle est la probabilité que X prenne la valeur 1 ?*
2. *En utilisant la table de la loi normale $N(0,1)$, calculer les probabilités suivantes : $P(X \leq 0,85)$, $P(X > -0,84)$, $P(-0,7 < X < 2,4)$, $P(-X > 1,5)$, $P(0,51 < X \leq 0,63)$.*
3. *Déterminer les réels a, b et c tels que : $P(|X| > a) = 0,73$, $P(|X| < b) = 0.75$ et $P(X < c) = 0,8$.*

***Exercice 38** *Soit $X \sim N(3,2)$. Calculer les probabilités suivantes : $P(X > 3)$, $P(X > -1)$, $P(|X-2| < 1)$.*

***Exercice 39** *Grâce aux courbes de croissance dans les carnets de santé, on estime que la moitié des filles de 16 ans mesurent plus de 161 cm, et que trois quart mesurent moins de 165 cm. On suppose que la taille peut être modélisée par une variable aléatoire gaussienne de loi $N(\mu, \sigma)$.*

2. Les exercices précédés d'une * sont prioritaires, ceux précédés de deux ** sont plus difficiles.

1. *Quelle valeur doit-on prendre pour μ ?*
2. *Quelle valeur doit-on prendre pour σ^2 ?*
3. *Quelle est la proportion de filles de 16 ans mesurant plus de 170 cm ?*

***Exercice 40** *Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables normales $N(\mu, \sigma)$ indépendantes. On définit*

$$\bar{X}_n \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{1}$$

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2. \tag{2}$$

1. *Montrer que $E(S_n^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$.*
2. *On suppose que $\sigma = 1$. Trouver n tel que*

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \leq 0.01) \geq 99\% \,.$$

Fiche 6
Théorèmes limites

Exercice 41 *On lance une pièce équilibrée 10000 fois. Soit S le nombre de "face".*

1. *Quelle est la probabilité d'avoir exactement 5000 "face" ;*
2. *Trouver a tel que S appartienne à l'intervalle $[E(S) - a, E(S) + a]$ avec une probabilité égale à $0,99$.*

***Exercice 42** *La probabilité d'une mauvaise réaction à un vaccin est de 0,001. Déterminer la probabilité que sur 2000 individus :*

1. *Exactement 3 fassent une mauvaise réaction ;*
2. *Au moins deux fassent une mauvaise réaction.*

Exercice 43 *Pour un certain type de graine, la probabilité de germination est 0,8. Une personne sème 400 graines. Quelle est la probabilité qu'au moins 300 germent.*

***Exercice 44** *Dans une population homogène de 20000 habitants, la possibilité pour qu'une personne quelconque demande à être vaccinée contre la grippe est $0,4$. De combien de vaccins doit-on disposer pour que la probabilité qu'on vienne à en manquer soit inférieure à $0,1$.*

Exercice 45 *Vous participez à 1000 tirages d'une loterie. A chaque tirage la probabilité que vous gagniez un prix est $0,001$. Quelle est la probabilité (approximative) que vous gagniez un prix*

1. *au moins une fois ;*
2. *exactement 2 fois ;*
3. *au moins deux fois.*

***Exercice 46** *On suppose que la probabilité d'avoir un accident (n'impliquant que sa propre voiture) sur l'autoroute A51 non-verglacée est de 1/10000. On suppose que pour un départ en week-end 20000 voitures fréquenteront cette autoroute. Soit X le nombre de voitures ayant eu un accident durant ce week end. On suppose que les accidents sont indépendants les uns des autres.*
1) Quelle est la loi de X ? Donner l'expression de $P[X = 1]$.
2) Par quelle loi peut on approximer la loi de X ? Donner une approximation de $P[X = 1]$.
3) Quelle est la probabilité approximative qu'il y ait au moins 2 accidents ?

Lorsque l'autoroute est verglacée la probabilité d'avoir un accident augmente considérablement et vaut 1/1000.

4) Par quelle loi peut-on approximer la loi de X ? Justifier brièvement.
5) Quelle est la probabilité qu'il y ait plus de 20 accidents ?
6) Quelle est la probabilité, avec 2 chiffres après la virgule, qu'il y ait plus de 30 accidents ?

On utilisera, si besoin, les approximations suivantes *:* $9999/10000 \approx 1$, $999/1000 \approx 1$, $\sqrt{20} \approx 4,5$ *et* $10/4,5 \approx 2,22$. *Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes des questions 4, 5 et 6.*

Exercice 47 *On lance successivement une pièce de monnaie pour laquelle on a une probabilité p d'obtenir "face". Notons F_n et L_n respectivement le nombre de "face" et de "pile" obtenu après n lancés. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$,*

$$P\left(2p-1-\epsilon \leq \frac{F_n - L_n}{n} \leq 2p-1+\epsilon\right) \to 1, \textit{quand } n \to \infty. \tag{3}$$

Exercice 48 *Une enquête réalisée par la Sofres permet d'estimer que la probabilité qu'une lettre, choisie au hasard dans le courrier d'une entreprise, parvienne à son destinataire en France, le lendemain vaut 0,5. Dans la suite on ne considère que les lettres à destination en France.*
A l'agence d'Orléans d'une grande entreprise A d'informatique on admet que l'on expédie 400 lettres par jour.

On note X la variable aléatoire qui, à un jour choisi au hasard, associe le nombre de lettres qui parviendront à leur destinataire le lendemain. On suppose que les acheminements de ces lettres se font en toute indépendance.
1) Expliquer en une phrase quelle est la loi a priori de X et préciser ses paramètres, sa moyenne, sa variance.
2) Par quelle loi peut-on approximer la loi de X, calculer $P[X > 215]$,
3) En utilisant l'approximation de la question 2) calculer $P[X = 72]$,
4) Donner un couple de valeurs (a,b) tel que $P(a \leq X \leq b) = 0.8$.*

La Sofres fait une seconde étude pour l'entreprise A et montre que le nombre de lettres n'arrivant pas du tout à leur destinataire est de 1 sur 200 lettres.
5) Quelle loi peut-on utiliser pour modéliser le nombre de lettres non reçues sur les 400 envoyées ?
6) Quelle est la probabilité (approximative) qu'au moins deux lettres ne parviennent pas à leur destinataire ?
7) Quelle est l'expression de la probabilité que plus de 11 lettres ne parviennent pas à leur destinataire ?

TD de Statistiques

Fiche 1
Lecture de tables et autres généralités

Exercice 49 ***Loi normale*** *Soit $X \sim N(1,2)$, calculer avec 2 chiffres après la virgule,*
1) $P(X > 2)$,
2) $P(|X-3| > 1)$,
3) Trouver a et b tels que $P(a < X < b) = 0,8$.

Exercice 50 ***Loi de Student***
1) $T \sim t_4$, calculer $P(X > 2)$ et $P(|X-1| > 1)$,
2) Soit $T \sim t_3$, trouver c et d tels que $P(c < T < d) = 0,9$.

Exercice 51 ***Loi du*** χ^2
1) Soit $X \sim \chi^2(4)$, donner une valeur approchée pour $P(X \geq 3,36)$,
2) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi normale centrée réduite, trouver a tel que $P(X_1^2 + X_2^2 > a) = 0,025$,
3) Supposons maintenant $X \sim N(2,2)$ et $Y \sim N(0,2)$, X et Y étant indépendantes, calculer $P(X^2 - 4X + Y^2 \leq 20)$.

Exercice 52 *Soit $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.). On suppose que X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p. On pose*

$$\hat{p}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{4}$$

1) Calculer $E(\hat{p}_n)$, $\hat{p}_n$ est-t-il sans biais ?
2) Calculer la variance de $\hat{p}_n$.
3) Calculer le risque quadratique ($E((\hat{p}_n - p)^2)$).
4) Démontrer la convergence en probabilité de $\hat{p}_n$ vers p.
4) Calculer la loi $\hat{p}_n$ en utilisant la fonction génératrice (voir page 23-24 du cours de probabilités).

Exercice 53 *Un institut de sondage interroge des personnes chaque semaine sur la place du Martroi. Chaque semaine l'intervieweur aborde 1000 personnes, le nombre de personnes ayant accepté de répondre est enregistré. On modélise celui-ci par une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $B(1000, p)$ où $0 \leq p \leq 1$ inconnu. Si $X_1, ..., X_n$ sont des observations i.i.d. suivant la loi $B(1000, p)$ on estime le paramètre p à l'aide de*

$$\hat{p}_n = \frac{1}{1000n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{5}$$

1) Calculer le biais et la variance de l'estimateur $\hat{p}_n$.
2) En déduire le risque quadratique de $\hat{p}_n$.
3) Déterminer sur combien de semaines doit s'étaler le sondage afin d'assurer une précision d'estimation de 0.001 avec probabilité de 0.95.

Exercice 54 *Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables normales $N(\mu, \sigma)$ indépendantes. On définit*

$$\bar{X}_n \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{6}$$

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2. \tag{7}$$

Montrer que $E(S_n^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$.
Donner un estimateur sans biais de σ^2.

Exercice 55 *Soient* $X_1, ..., X_n$ *des variables de Poisson de paramètre inconnu* λ. *Si on prend comme estimateur pour* λ, $\bar{\lambda}_n = \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)$ *trouver l'erreur carrée moyenne de cet estimateur.*

Fiche 2
Maximum de vraisemblance

Exercice 56 *On suppose qu'un objet manufacturé dans une certaine usine a la probabilité* p *d'être défectueux et* $1 - p$ *d'être en bon état. On souhaite estimer* p.
1) Une première expérience consiste à compter le nombre N_1 *d'objets défectueux parmi 1000 objets examinés.*
2. Une deuxième expérience consiste à compter le nombre N_2 *d'objets examinés jusqu'à ce qu'un objet défectueux soit trouvé.*
3. Une troisième expérience consiste à compter le nombre d'objets N_3 *examinés jusqu'à ce que dix objets défectueux soient trouvés.*
Dans ces trois situations, quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de p *si on a observé* $n_1 := N_1(\omega) = 124, n_2 = 10, n_3 = 79$.

Exercice 57 *: Une équipe de football joue 10 matches au cours d'un tournoi, et l'on note* $X_i i$ *le nombre de buts marqués au cours de la ième partie. On suppose que les* X_i, $i = 1, ..., 10$ *sont des variables indépendantes de Poisson de paramètre* λ.
1) Calculer $P(X_1 + X_2 = k)$ *pour un entier* k *quelconque. En déduire que* $X_1 + X_2$ *est une variable de Poisson de paramètre* 2λ.
2) On admettra que $X_1 + ... + X_n$ *est une variable de Poisson de paramètre* $n\lambda$. *Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de* λ *si l'on sait que pendant 10 matches, cette équipe a marqué 12 buts.*
3) Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ *si l'on sait que pendant les 5 premiers matches elle a marqué 10 buts, et pendant les 5 derniers matches elle a marqué 2 buts.*

Exercice 58 *Afin de tester un dé, on le lance 1000 fois, et on compte le nombre de sorties du 6.*
1) Sur les 12 premiers lancés, 6 sort 3 fois. Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de la probabilité de sortie du 6 ?
2) Si on a obtenu 205 fois le 6, peut-on avec un risque ne dépassant pas 5%, *déclarer le dé non équilibré ?*

Exercice 59 *Soit un échantillon de* n *variables aléatoires* $U_1, ..., U_n$, *suivant la loi uniforme sur l'intervalle* $[0, a]$.
1) Calculer l'estimateur de a *par la méthode du maximum de vraisemblance.*
2) Quelle est la loi de l'estimateur du maximum de vraisemblance ?
3) Quelle est l'espérance de l'estimateur du maximum de vraisemblance ? Est-il sans biais ?
4) Calculer le risque quadratique de l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Fiche 3
Intervalles de confiance

Exercice 60 *Dans un service public, on s'intéresse au nombre de clients arrivant à un guichet donné pendant une minute. On admet que ce nombre* X *peut être modélisé par une variable de Poisson de paramètre* λ*. 1. Que représente le paramètre* λ *? 2. Pour avoir une idée de* λ*, on a observé pendant 100 minutes le nombre de clients arrivant au guichet par minute. On a relevé* $\bar{x}_{100} = 1.8$.
Donner un intervalle de confiance pour λ *de coefficient de sécurité* 95%.

Exercice 61 *: On s'intéresse à la durée de vie d'un certain type d'ampoules électriques. On suppose que cette durée de vie peut être modélisée par une variable aléatoire* X *de loi exponentielle de paramètre* λ*, c'est à dire*

$$\forall t,\ P(X \geq t) = \exp(-\lambda t) \tag{8}$$

1) Calculer $E(X), Var(X)$.
2) Soient $X_1, \cdots, X_n$ n *variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre* λ. *Pour tout* $t > 0$ *calculer* $P(\lambda \min(X_i, i \leq n) \geq t)$.
3) On a observé la durée de vie de 1000 ampoules. Sur ces 1000 ampoules, on obtient $min(X_i, i \leq 1000) = 1.02$. *Donner un intervalle de confiance pour* $1/\lambda$ *de coefficient de sécurité* 95%. *4) Sur le même échantillon, on a observé* $X_n(\omega) = 683.5$. *Construire un intervalle de confiance de coefficient de sécurité* 95% *en utilisant le TLC.*

Exercice 62 *Un échantillon constitué par 10 mesures de diamètre d'une sphère présente une moyenne* $\bar{d}_{10} = 4,38$ *cm. Construire un intervalle de confiance de niveau de confiance 0.95 pour la moyenne théorique de la variable* D *"diamètre en cm", en supposant qu'elle suit une loi normale d'écart type 0,06.*

Exercice 63 *On fabrique des cordes et on note* T *la tension de rupture de ces cordes, exprimée en kg/cm*^{2}. *On sait que* T *suit une loi gaussienne. On mesure la tension de rupture sur 10 cordes prélevées au hasard dans la production. Les résultats obtenus sont*

251 247 255 305 341 324 329 345 392 289.

Au vu de ces valeurs, donner un intervalle de confiance de coefficient de sécurité 0,95 pour la moyenne théorique de la tension de rupture des cordes produites.

Exercice 64 *: On admet que la taille en centimètres d'une certaine espèce de plante peut être modélisée par une variable* H *de loi normale* $N(\mu, \sigma)$. *Une série de 30 mesures a donné les résultats suivants :* $\bar{h}_{30} = 22,34$, $\bar{s}_{30} = 1,24$. *Donner un intervalle de confiance pour* σ *au niveau de confiance* 0.95.

Exercice 65 *La ligne de métro de la Timone à La Rose contient 14 stations que l'on numérote de 0 à 13. Le temps mis pour aller de la station* $i-1$ *à la station* i *est noté* X_i *pour* $i = 1, ..., 13$. *On suppose que les* $X_i, i = 1, ..., 13$ *sont des variables aléatoires indépendantes de même loi normale* $N(\mu, \sigma)$*, avec* $\sigma = 0,2$. *On a chronométré la durée totale d'un trajet Timone-La Rose : t=32,5 minutes. Trouver un intervalle de confiance pour* μ *de niveau de confiance 0,9.*

Exercice 66 *On admet que la taille en centimètres d'une certaine espèce de plante peut être modélisée par une variable* H *de loi normale* $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. *Une série de 30 mesures a donné les résultats suivants :*
moyenne de l'échantillon $\bar{h}_{30} = 22,34$ *;*
écart-type de l'échantillon $s_{30} = 1,24$.
Donner des intervalles de confiance pour μ *et* σ *de coefficient de sécurité 0,95.*

Exercice 67 *Des mesures sont faites sur la masse de ce qu'on pense être une nouvelle particule élémentaire. La masse de la particule connue qui est la plus proche de la masse de la supposée nouvelle particule, est* m_0*. On sait par expérience que le procédé de mesure utilisé pour les particules de masse proche de* m_0*, produit un écart-type de* $0,07\, m_0$*. Construire un test permettant de tester sur un échantillon de n mesures, si la supposée nouvelle particule est effectivement nouvelle, avec un risque de 1%.*

Exercice 68 *40 moteurs provenant d'une même fabrication ont fonctionné en moyenne 240 jours sans problème. Le fabricant affirme que la variable J "nombre de jours de fonctionnement sans problème" suit une loi gaussienne de moyenne 260, et d'écart-type 40. Quelle est la P-valeur d'un test permettant de vérifier les dires du fabricant.*

Exercice 69 *Un hôpital utilise un même médicament sous deux dilutions, la forme A étant plus diluée que la forme B. Un lot de ce médicament arrive à l'hôpital. Malheureusement, le fabricant a oublié d'étiqueter le lot. Le laboratoire de l'hôpital effectue donc une série de 10 dosages pour déterminer s'il s'agit de la forme A ou B. S'il s'agit de la forme A, le résultat d'un dosage suit la loi* $\mathcal{N}(300, \sigma = 50)$*. S'il s'agit de la forme B, cette loi est* $\mathcal{N}(600, \sigma = 50)$*. Les résultats des 10 dosages ont donné*

528 467 659 568 619 614 601 539 543 577

1. *Effectuer un test permettant de se décider entre la forme A ou B, si on veut contrôler la probabilité de se tromper en décidant qu'il s'agit de la forme A. Quelle est la P-valeur de ce test ?*
2. *Après avoir enfin réussi à contacter le fabricant, il s'avère qu'il s'agit de la forme B. L'hôpital commence à douter de l'écart-type de la méthode de dosage utilisée. Effectuer un test permettant de confirmer ces doutes en fixant l'erreur de première espèce à 5%.*